REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
E. V. 64

Table des matières contenues dans ce Volume.

Cauchy (Augustin-Louis). = Résumé d'un mémoire sur la Mécanique céleste, et sur un nouveau calcul, appelé Calcul des limites. Turin, 1831.

———— = Extrait du mémoire présenté à l'Acad.e de Turin, le 11. 8bre 1831.

———— = Résumé d'un mémoire sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites; et sur les avantages que présentent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes. Turin, 1831.

———— Mémoire sur les rapports etc ut supra 1831

———— = Calcul des indices des fonctions. Turin, 1833.

———— = Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes. Paris, 1832.

———— = Mémoire sur l'integration des équations différentielles. Prague, 1835.

———— = Sur l'interpolation. Prague, 1836. Suivie de notes et d'une lettre du Rev. Bidone, et de la Réponse de M. Cauchy.

Résumé
d'un Mémoire sur la Mécanique Céleste
et
sur un nouveau calcul, appelé Calcul des limites;

par M. Augustin Cauchy,
membre de l'institution de France.

Turin. Octobre 1831.

Sur la mécanique Céleste

et sur un nouveau calcul qui s'applique à un grand nombre de questions Dynamiques.

(lu à l'académie de Turin dans la séance du 11 oct. 1891).

Avant d'indiquer d'une manière plus précise l'objet des recherches que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, il ne sera pas inutile de dire à quelle occasion elles ont été entreprises.

Les méthodes que les géomètres ont employées pour déduire du principe de la gravitation les mouvements des corps célestes laissaient encore beaucoup à désirer. Souvent elles manquaient de la rigueur convenable. Ainsi en particulier on ne trouve nulle part dans la Mécanique Céleste de Laplace une démonstration suffisante de la formule de Lagrange, qui sert pourtant de base à la plupart des théories exposées dans cet ouvrage. D'ailleurs pour déterminer, à l'aide de ces méthodes, les coefficients numériques relatifs à telle ou telle perturbation des mouvements planétaires, les astronomes étaient quelquefois obligés d'entreprendre des calculs qui exigeaient plusieurs années de travail. Un des membres les plus distingués de cette Académie, M. Plana, m'ayant parlé dernièrement encore de temps que consumaient de pareils calculs, je lui dis que j'étais persuadé qu'il serait possible de les abréger, et même de déterminer immédiatement le coefficient numérique correspondant à une inégalité donnée. Effectivement au bout de quelques jours, je lui rapportai des formules à l'aide desquelles on pouvait résoudre de semblables questions, et dont j'avais déjà fait l'application à la détermi-

notion de certains nombres qu'il est utile de considérer dans la théorie de Saturne et de Jupiter. Quelques jours après, en m'appuyant sur des résultats qu'il avait obtenus dans un de ses mémoires, M. Plana m'a dit avoir retrouvé ou les mêmes formules ou des formules du même genre. Du reste, pour établir les formules dont il s'agit et d'autres formules analogues que renferme le mémoire ci-joint, il suffit d'appliquer au développement de la fonction, désignée par R dans la Mécanique Céleste, des théorèmes bien connus tels que le théorème de Taylor et le théorème de Lagrange sur le développement des fonctions des racines des équations algébriques ou transcendantes. Mais on a besoin de recourir à d'autres principes et à de nouvelles méthodes pour arriver à des résultats plus importants dont je vais maintenant donner une idée.

En joignant à la série de Stirling ou de Maclaurin le reste qui la complète, et présentant ce reste sous la forme que Lagrange lui a donnée ou sous d'autres formes du même genre, on peut s'assurer, dans un grand nombre de cas, qu'une fonction f(x) de la variable x est développable pour certaines valeurs de x en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable et déterminer la limite supérieure des modules* des valeurs réelles ou imaginaires de x, pour lesquels le développement

---

* Le module d'une valeur imaginaire de x est la racine carrée positive de la somme qu'on obtient en ajoutant le carré de la partie réelle au carré du coefficient de $\sqrt{-1}$. Lorsque ce coefficient s'évanouit, le module se réduit à la valeur numérique de x.

subdivisé. Ajoutons que, pour développer une fonction explicite de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$ c'est à dire, en une série convergente dont le terme général soit une fonction entière et homogène de $x, y, z, \ldots$, il suffit de remplacer la fonction proposée $f(x, y, z, \ldots)$ par $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots)$, puis de développer $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de α, et de poser ensuite $\alpha = 1$. Par conséquent la théorie du développement des fonctions explicites de plusieurs variables se ramène immédiatement à la théorie du développement des fonctions explicites d'une seule variable. Mais il importe d'observer que l'application des règles, à l'aide desquelles on peut décider si la série de Stirling est convergente ou divergente, devient souvent très difficile, attendu que, dans cette série, le terme général ou proportionnel à x^n enferme la dérivée de l'ordre n de la fonction $f(x)$ ou du moins des valeurs correspondantes à une valeur nulle de x, et que, hormis certains cas particuliers, la dérivée de l'ordre n d'une fonction donnée prend une forme de plus en plus compliquée, à mesure que n augmente.

Quant aux fonctions implicites, on a présenté, pour leur développement en séries, diverses formules déduites le plus souvent de la méthode des coefficients indéterminés. Mais les démonstrations qu'on a prétendu donner de ces formules sont généralement insuffisantes 1° parce qu'on n'a point examiné si les séries sont convergentes ou divergentes, et qu'en conséquence on ne peut dire le plus souvent dans quels cas les formules doivent être admises ou rejetées, 2° parce qu'on ne s'est point attaché à démontrer que les développements obtenus valent pour toutes les fonctions développées, et qu'il peut arriver qu'une série convergente provienne du développement d'une fonction,

dans que la somme de la série soit équivalente à la fonction elle-même. Il est vrai que l'établissement de règles générales propres à déterminer dans quels cas les développements de fonctions implicites sont convergents et représentent ces mêmes fonctions paraîtra offrir de grandes difficultés. On peut en juger en lisant attentivement le mémoire de M. Laplace sur la convergence ou la divergence de la série que fournit, dans le mouvement elliptique d'une planète le développement du rayon vecteur suivant les puissances ascendantes de l'excentricité. Je pense donc que les géomètres et les astronomes attacheront quelque prix à mon travail quand ils apprendront que je suis parvenu à établir, sur le développement des fonctions soit explicites soit implicites, des principes généraux, et d'une application facile, à l'aide desquels on peut non seulement démontrer avec rigueur les formules, et indiquer les conditions de leur existence, mais encore fixer les limites des erreurs que l'on commet en négligeant les restes qui doivent compléter les séries. Parmi ces règles, celles qui se rapportent à la fixation des limites des erreurs commises présentent dans leur ensemble un nouveau calcul que je désignerai sous le nom de calcul des limites. Je me contenterai d'indiquer ici en peu de mots quelques unes des propositions fondamentales sur lesquelles repose le calcul dont il s'agit.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x. Si l'on attribue à cette variable une valeur imaginaire $\bar{x}$ dont le module soit X, le rapport de $\bar{x}$ à X sera une exponentielle de la forme $e^{p\sqrt{-1}}$, p désignant un certain arc réel que l'on pourra supposer compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$; et le module de $f(\bar{x})$ dépendra tout à la fois du module X et de l'arc p. Or parmi les valeurs que

prendra le module de $f(x)$ quand on fera varier p, il y en aura généralement une qui sera supérieure à toutes les autres. C'est cette valeur maximum du module de $f(x)$ que je considère spécialement dans le calcul des résidus. Je la désigne par la lettre caractéristique Λ placée devant la fonction $f(x)$, et je prouve 1° que la fonction $f(x)$ est développable par le théorème de Stirling en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, lorsque le module de x étant égal ou inférieur à X, la fonction $f(x)$ reste finie et continue pour le module X ou pour un module plus petit de la variable réelle ou imaginaire x; 2° qu'alors, dans le développement de $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, le coefficient de x^n offre un module inférieur au quotient qu'on obtient en divisant par X^n le module maximum de $f(x)$. Cela posé, si l'on attribue à x une valeur imaginaire dont le module soit désigné par ξ, le module du terme général, dans le développement de $f(x)$, sera inférieur au produit de $\Lambda f(x)$ par la $n^{ième}$ puissance du rapport $\frac{\xi}{X}$. D'ailleurs, lorsque la fonction $f(x)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, le reste qui complète cette série, prolongée jusqu'au $n^{ième}$ terme, équivaut à la somme des termes dont chacun a l'exposant de x égal ou supérieur à n. Donc le module de ce reste, s'il est imaginaire, ou sa valeur numérique, s'il est réel, ne surpassera pas la somme des termes correspondants à chacune nouvelle manière d'indiquer dans la progression géométrique indéfinie mentionnée, c'est à dire, le reste qui complète cette progression. Ainsi la détermination d'une limite supérieure au reste qui complète la série propre à représenter le développement d'une fonction quelconque, se trouve ramenée à la

détermination des restes des progressions géométriques, c'est à dire, à une question résolue depuis longtemps en analyse. On sait en effet que, dans la progression géométrique qui a pour premier terme l'unité, et pour raison $\frac{\xi}{X}$, la somme des termes dont le dernier ξ porte un exposant égal ou supérieur à n, équivaut au quotient du $n^{ième}$ terme par la différence $1 - \frac{\xi}{X}$. Lorsque le premier terme devient $A\,\xi(x)$, il faut multiplier par ce premier terme le quotient dont il s'agit.

Il est important d'observer que, d'après ce qu'on vient de dire, les limites supérieures aux modules du terme général de la série de Stirling et du reste qui complète cette série sont des fonctions du module X, qui représentent les maxima relatifs à p des modules de certaines fonctions de la variable imaginaire $x = X e^{p\sqrt{-1}}$. D'ailleurs le module X doit surpasser le module ξ, et être déterminé de manière que la fonction $\xi(x)$ reste finie et continue pour le module X ou pour un module plus petit de la variable x. Or, parmi les valeurs de X qui remplissent ces deux conditions, on devra évidemment choisir de préférence celles qui rendront les limites supérieures dont il s'agit les plus petites possibles; et alors ces limites, considérées comme valeurs particulières des fonctions de x désignées mentionnées, seront tout à tour des maxima relativement à l'angle p, et des minima relativement au module X, ou, ce que nous avons nommé dans un autre mémoire les modules principaux de ces mêmes fonctions.

Au surplus, quand on se propose uniquement de calculer des limites supérieures aux modules des termes généraux ou des restes des séries, il n'est point nécessaire de déterminer exactement les modules principaux dont il est ici question; et l'on

peut se contenter de chercher des nombres supérieurs à ces modules.

Il est facile d'étendre les principes que nous venons d'indiquer aux fonctions de plusieurs variables. Soit en effet $f(x, y, z, \ldots)$ une fonction donnée des variables $x, y, z, \ldots$ Si l'on attribue à ces variables des valeurs imaginaires $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$ dont les modules soient respectivement $X, Y, Z, \ldots$ le module de $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$ dépendra tout à la fois des modules $X, Y, Z, \ldots$ et des rapports imaginaires $\frac{\overline{x}}{X}, \frac{\overline{y}}{Y}, \frac{\overline{z}}{Z}$, etc... On peut choisir ces rapports, ou plutôt les arcs de cercle qui s'y trouvent renfermés, de manière que le module de $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$ acquière la plus grande valeur possible, les nombres X, Y, Z restant les mêmes. C'est cette plus grande valeur ou cette valeur <u>maximum</u> que je désigne par la caractéristique Λ, placée devant la fonction $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$; et je prouve 1° que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$ quand les modules des variables $x, y, z, \ldots$ sont égaux ou inférieurs à $X, Y, Z, \ldots$ la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ reste finie et continue pour les modules $X, Y, Z, \ldots$ ou pour des modules plus petits de ces mêmes variables; 2° que alors, dans le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$ le coefficient de $x^n y^{n'} z^{n''} \ldots$ offre un module inférieur au quotient qu'on obtient en divisant par $X^n Y^{n'} Z^{n''} \ldots$ le module maximum de $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$. Cela posé, si l'on attribue à $x, y, z, \ldots$ des valeurs réelles ou imaginaires dont les modules $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ soient plus petits que $X, Y, Z, \ldots$, les divers termes du

développement de la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ offrant des modules respectivement inférieurs aux termes correspondants d'une fonction de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ qu'on obtiendra en multipliant le module maximum de $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$ par les sommes des progressions géométriques qui ont pour premiers termes l'unité et pour raisons les rapports $\frac{\xi}{X}, \frac{\eta}{Y}, \frac{\zeta}{Z}, \ldots$ Donc, si l'on néglige, dans le développement de la première fonction $f(x, y, z, \ldots)$ certains termes, par exemple, ceux dans lesquels l'exposant de x est égal ou supérieur à n, l'exposant de y égal ou supérieur à n', l'exposant de z égal ou supérieur à n'', etc.... , l'erreur * commise sera plus petite que la somme des termes correspondants de la seconde fonction, et par conséquent inférieure au produit de $\Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$ par les restes des progressions géométriques ci-dessus mentionnées.

Observons encore qu'après avoir déterminé en fonction de X, Y, Z une limite supérieure au reste de la série qui représente le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, on devra choisir $X, Y, Z, \ldots$ de manière à rendre cette limite la plus petite possible.

Si l'on voulait obtenir une limite supérieure à la somme des modules des termes qui, dans le développement de $f(x, y, z, \ldots)$, offrent un degré égal ou supérieur à n, c'est à dire, des termes dans lesquels les exposants de $x, y, z, \ldots$ offrent une somme égale ou supérieure à n, il suffirait de chercher une limite supérieure au reste de la série qui représente le développement de $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots)$

---

* Lorsque les termes négligés sont réels l'erreur commise a pour mesure la valeur numérique de leur somme. Lorsqu'ils deviennent imaginaires, le module de cette même somme peut servir à mesurer l'erreur dont il s'agit.

suivant les puissances ascendantes de α, et de poser dans cette limite $\alpha = 1$.

Les principes que nous venons d'établir s'appliquent très facilement aux séries qui représentent les développements des fonctions explicites d'une ou de plusieurs variables, et fournissent pour ces séries non seulement des règles générales de convergence, mais encore des limites supérieures aux modules des termes généraux, et aux erreurs que l'on commet quand on calcule seulement un certain nombre de termes en négligeant tous les autres. Pour étendre l'application des mêmes principes aux séries qui représentent les développements d'une ou de plusieurs fonctions implicites déterminées par une ou plusieurs équations algébriques ou transcendantes, il suffit d'observer qu'on vertu de la formule de Lagrange, et des formules analogues qui se déduisent du calcul des résidus, les coefficients des termes généraux, dans ces mêmes séries, peuvent être, comme dans les séries de Taylor et de Stirling, exprimés au moyen des dérivées des divers ordres de certaines fonctions, et qu'en conséquence la détermination des limites supérieures aux modules des termes généraux et aux restes des séries peut être réduite à la détermination des modules maxima de ces mêmes fonctions. On pourra donc établir pour les séries proposées des règles de convergence, et trouver des limites supérieures aux restes des séries ou plutôt à leurs modules. La seule question qui restera indécise sera de savoir si les séries, supposées convergentes, ont effectivement pour sommes les fonctions implicites dont le développement les a produites. Or on peut s'appuyer, pour résoudre cette question, sur des propositions générales semblables à celles que je vais énoncer.

1er théorème. Supposons qu'une fonction implicite u de la variable x soit déterminée par une équation algébrique ou transcendante, qu'elle se réduise à u_0 pour une valeur nulle de x, et que l'on ait développé cette fonction implicite en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x par la formule de Stirling, de Lagrange, etc., ou, ce qui revient au même, par la méthode des coefficients indéterminés. La somme de cette série représentera la fonction u, si la valeur de x est tellement choisie que, la série étant convergente, la fonction explicite de x et u, qui constitue le premier membre de l'équation donnée soit elle-même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x et de la différence $u-u_0$.

2e théorème. Supposons que plusieurs fonctions implicites u, v, w, ... de plusieurs variables x, y, z, ... soient déterminées par une ou plusieurs équations algébriques ou transcendantes, qu'elles se réduisent à $u_0, v_0, w_0, \ldots$ pour des valeurs nulles de x, y, z, ..., et qu'on ait développé ces fonctions implicites en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de x, y, z, ... par les formules de Stirling, de Lagrange, etc., ou, ce qui revient au même, par la méthode des coefficients indéterminés. La somme de ces séries représentera les valeurs de u, v, w, ... si les valeurs de x, y, z, ... sont tellement choisies que, les séries étant convergentes, les fonctions explicites de x, y, z, ... u, v, w, ... qui constituent les premiers membres des équations données soient elles-mêmes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables x, y, z, ... et des différences $u-u_0$, $v-v_0$, $w-w_0$, ...

Pour démontrer ces propositions, il suffit évidemment d'observer

que, si les conditions énoncées sont remplies, les premiers membres des équations données, après les substitutions des valeurs générales de $u-u_0$, $v-v_0$, $w-w_0$, ... seront encore des séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x, y, z, ..., et que, dans ces séries convergentes, le coefficient de chaque terme sera identiquement nul.

Au surplus, sans le secours de ces propositions, et en s'appuyant sur des formules générales que fournit le calcul des résidus, on peut établir directement des règles dignes de remarque sur la convergence des séries qui représentent les développements des fonctions implicites, et sur la fixation des limites supérieures aux modules des restes qui complètent les séries.

Les propositions ci-dessus mentionnées peuvent encore être facilement étendues au cas où les fonctions implicites seraient déterminées par des équations aux différences finies ou infiniment petites, ou aux différences partielles, ou aux différences mêlées. Ainsi, en particulier, on pourra énoncer le théorème suivant.

3e Théorème. Soient données plusieurs équations différentielles simultanées entre la variable x, des fonctions inconnues y, z, ... de cette variable, et leurs dérivées de divers ordres y', z', .. y'', z'', ... Supposons d'ailleurs que par la méthode des coefficients indéterminés on ait développé y, z, ... en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Les sommes de ces séries représenteront les valeurs générales de y, z, ..., si la valeur de x est tellement choisie que, les séries dont il s'agit et par suite celles qui représenteront les dérivées de y, z, ... étant convergentes, les fonctions explicites de x, y, z, .. y', z', ..., qui constituent les premiers membres des équations données, soient elles-mêmes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x et des différences qu'on obtient en retranchant des valeurs générales de

$y, z, \ldots y', z', \ldots$ leurs valeurs initiales correspondantes à $x = x_0$.

Je n'ai pu qu'indiquer rapidement quelques uns des principaux résultats contenus dans le mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie. Ce mémoire renferme encore 1° une théorie de la variation des constantes arbitraires* plus générale et à quelques égards plus simple que celles qui se trouvent exposées dans les mémoires de MM. Lagrange, Laplace et Poisson, 2° des intégrales définies propres à représenter, dans le développement connu de la fonction R, le coefficient du sinus ou du cosinus d'un angle donné, 3° des formules d'interpolation qui, servant à déterminer une fonction entière de sinx et de cosx, quand on connaît un nombre suffisant de valeurs particulières de cette même fonction, 4° plusieurs développements nouveaux de la fonction R, avec des formules propres non seulement à former les termes généraux de ces développements, mais encore à déterminer les limites des erreurs commises quand on conserve seulement certains termes en négligeant tous ceux qui les suivent. Je montre aussi dans quels cas l'un de ces développements doit être employé de préférence à l'autre. Enfin, en particulier, si l'on demande les perturbations produites dans le mouvement d'une planète par une autre planète située à très peu près à la même distance du Soleil que la première, le développement employé jusqu'ici par les astronomes devra être rejeté, et il

---

* Dans un mémoire présenté à l'Institut, M. Ostrogradsky s'était aussi occupé de la variation des constantes arbitraires, et il avait appliqué, à ce que je crois, ma formule de M. Poisson à la conversion des termes qui composent le développement de la fonction R en intégrales définies. Mais, n'ayant qu'un souvenir confus de ce mémoire, tout ce que je puis dire ici, c'est que, dans le cas où quelques unes de nos formules coïncideraient avec quelques unes des mêmes, je ne prétends en aucune manière lui contester la priorité.

faudra lui substituer un des autres développements cités plus haut. On devra donc recourir à ces nouveaux développements, dans la théorie des petites planètes, quand on recherchera les inégalités qui dépendent de leurs attractions mutuelles.

Du reste, si l'Académie attache quelque prix aux travaux dont je viens de l'entretenir, je pourrai sous peu de temps lui offrir d'autres mémoires dans lesquels je montrerai d'une part comment on peut appliquer le calcul des résidus à la théorie du développement des fonctions implicites, et de l'autre comment on peut s'assurer de la convergence des séries qui représentent les intégrales des équations différentielles linéaires ou non linéaires, et parmi des limites supérieures aux modules des restes qui complètent ces mêmes séries.

Turin, ce 15 octobre 1831.